


Additional Mathematics

# คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

## หน่วยการเรียนรู้ที่ 7
## อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อ .....

ชั้น ..... เลขประจำตัว .....

โรงเรียน .....

ครูผู้สอน....

พิชญุตม์ ราชเดิม(PunPitchy)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ Best Friend Forever School

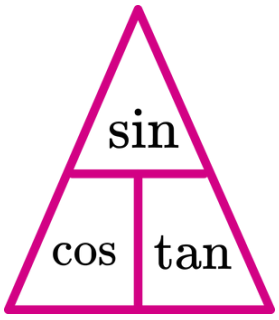
# 7.1 ฟังก์ชั่น sin cos tan และบทนิยาม

ตรีโกณมิติ คือแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์เรขาคณิต ที่ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างมุมและความยาวแต่ละด้าน ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ตรีโกณมิติ มีสามฟังก์ชั่น เป็นสามตัวหลักที่มักถูกนำไปใช้ในสาขาอื่นๆ โดยเฉพาะ สาขาฟิสิกส์และดาราศาสตร์ ได้แก่ sin cos tan ซึ่งสามตัวนี้มีความสัมพันธ์กันว่า

$$\sin\theta = \cos\theta \cdot \tan\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



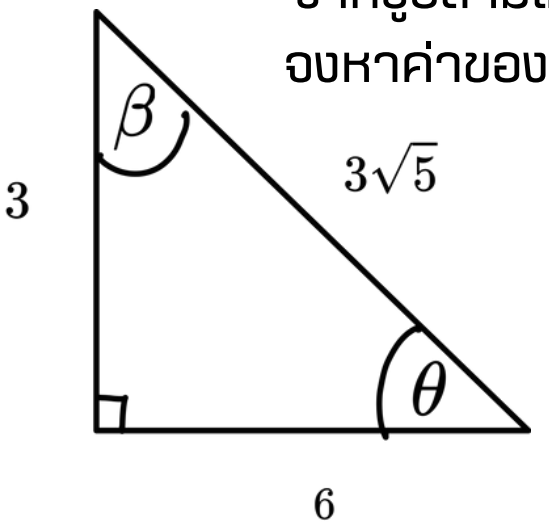

ฟังก์ชั่นตรีโกณมิติมีความสัมพันธ์กับด้านแต่ละด้าน ของสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็นอัตราส่วนด้าน ว่า

sin = ข้าม:ฉาก
cos = ชิด:ฉาก
tan = ข้าม:ชิด

โดยที่
ข้าม = ตรงข้ามมุมที่สนใจ
ฉาก = ตรงข้ามมุมฉาก
ชิด = ประชิดมุมที่สนใจ

อัตราส่วนตรีโกณมิติ หน้าที่ 2

จากรูปสามเหลี่ยมพร้อมมุมและความยาวด้านที่กำหนด จงหาค่าของ




$\sin\theta$ $\sin\beta$

$\cos\theta$ $\cos\beta$

$\tan\theta$ $\tan\beta$

$$\frac{\sin^2\theta\cdot\cos^2\beta}{\frac{\tan\theta}{\tan\beta}} = ?$$

ตารางมุมตรีโกณพื้นฐานที่ควรจำได้

| Angle / function | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ |
|---|---|---|---|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tan | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |

อัตราส่วนตรีโกณมิติ หน้าที่ 3

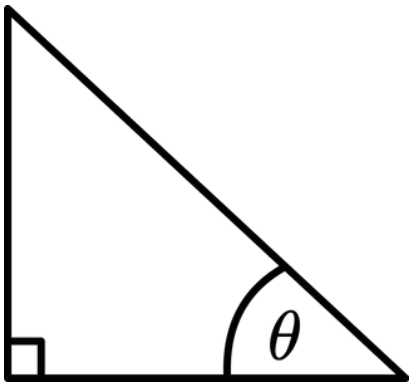
## แบบฝึกหัด

$$\sin 30^\circ + \sin 45^\circ$$

$$\frac{\cos 45^\circ + \sin 45^\circ}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{\cos 30^\circ \times \frac{4}{3}}$$

$$\frac{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}{2\tan^2 45} \times \frac{\cos^2 60^\circ}{\sin 30^\circ}$$



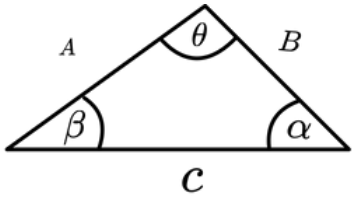

จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

ถ้า $\sin^2\theta = \dfrac{(-5)+6\times(-3)+((-6)^2-(-8+(-2)))+(-5\times 3)}{8+(-3\times 2)+(-4)-(-3^2)+\sqrt{4}}$

แล้ว $\dfrac{\cos^2\theta+(-\tan\theta)-(-\cos(90-\theta))}{\tan^2\theta+\sqrt{\cos\theta}}$

มีค่าเท่าใด

ความสัมพันธ์พื้นฐานของ 3 ฟังก์ชั่นกับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ที่ไม่ใช่สามเหลี่ยมมุมฉาก มีความสัมพันธ์พื้นฐาน เป็น Law of แต่ละฟังก์ชั่น ดังนี้




$law\ of\ \sin \rightarrow \frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\theta}{C}$

$law\ of\ \cos \rightarrow A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha$

$\rightarrow B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta$

$\rightarrow C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$

$law\ of\ tan \rightarrow \frac{A-B}{A+B} = \frac{\tan(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})}$

$\rightarrow \frac{B-C}{B+C} = \frac{\tan(\frac{\beta-\theta}{2})}{\tan(\frac{\beta+\theta}{2})}$

$\rightarrow \frac{c-A}{c+A} = \frac{\tan(\frac{\theta-\alpha}{2})}{\tan(\frac{\theta+\alpha}{2})}$

$\rightarrow \frac{B-A}{B+A} = \frac{\tan(\frac{\beta-\alpha}{2})}{\tan(\frac{\beta+\alpha}{2})}$

$\rightarrow \frac{C-B}{C+B} = \frac{\tan(\frac{\theta-\beta}{2})}{\tan(\frac{\theta+\beta}{2})}$

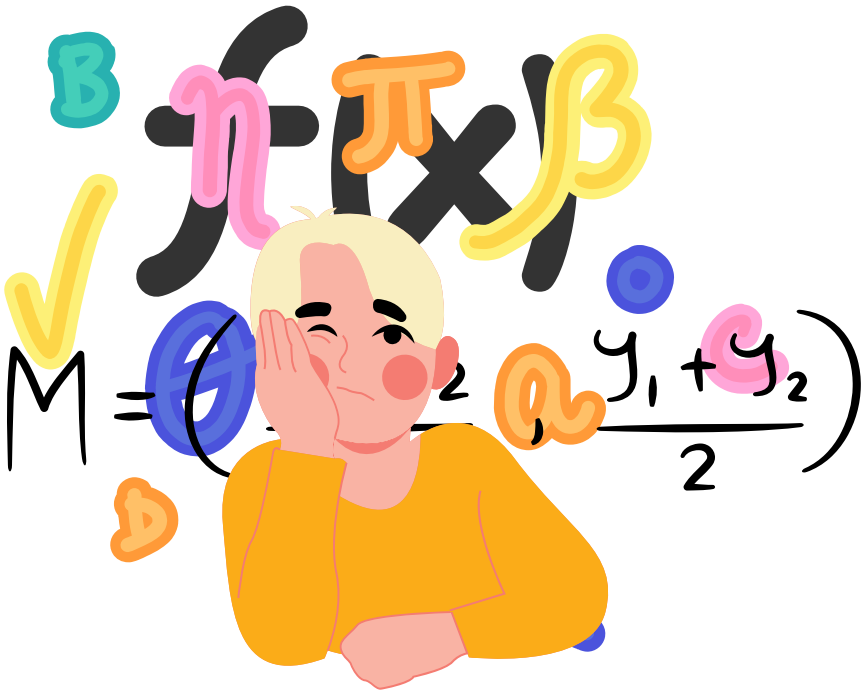
$\rightarrow \frac{A-C}{A+C} = \frac{\tan(\frac{\alpha-\theta}{2})}{\tan(\frac{\alpha+\theta}{2})}$

สูตรตรีโกณเป็นล้าน ท่องให้ตาย ก็ต้องจำ(ไม่)ได้

$$\sin\theta = \frac{1}{\cos ec\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{cot\,\theta}$$




$$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$$

$$\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta)$$

$$\cos ec\theta = sec\,(90^\circ - \theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\cdot\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1-2\sin^2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$$\sin(\frac{\theta}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos(\frac{\theta}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan(\frac{\theta}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos(\frac{(\alpha+\beta)}{2}\ \sin(\frac{(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\ \cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta)}{2}\ \sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha-\sin^2\beta$$

จดเพิ่มแนวข้อสอบวัดผล

หลักการ
คือครึ่งหนึ่งของทั้งหมด

พีทาโกรัส
(นักคณิตศาสตร์ นักปรัชญาชาวกรีกโบราณ
ผู้ได้รับฉายาว่า “บิดาแห่งตัวเลข”)